

中图法分类号: O242.2; O244 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2026)04-1241-15

论文引用格式: Zhu Z J and Fu X M. 2026. A geometric approach to the initial value problem of geodesics on parametric surfaces. Journal of Image and Graphics, 31(4): 1241-1255 (朱子建, 傅孝明. 2026. 求解参数曲面上测地线初值问题的几何方法. 中国图象图形学报, 31(4): 1241-1255) [DOI: 10.11834/jig.250426]

求解参数曲面上测地线初值问题的几何方法

朱子建, 傅孝明*

中国科学技术大学数学科学学院, 合肥 230026

摘要: 目的 曲面上测地线的初值问题不仅是微分几何中的基础性课题, 也在几何建模、图形处理及科学计算等多个领域中发挥着关键作用。现有几何方法通过结合测地线的切向量与曲率向量, 并借助泰勒展开式逐步构造测地路径。虽然在一定程度上简化了计算, 但在计算精度与计算效率方面仍存在不足。为提升几何方法的性能, 本文进行了一些改善与提升。**方法** 基于测地线在曲面上一点处的曲率向量与曲面在该点的法向量平行的几何性质, 结合以弧长为参数的曲线具有单位切向量的约束, 推导出一种新的曲率向量计算方法, 该方法在简化计算流程的同时提高了计算精度, 从而增强了整个几何算法的精度与效率; 给出了改进后几何方法的相关误差估计。**结果** 实验结果表明, 与一种较先进的几何方法相比, 所提方法在计算时间上缩短约 25%, 而计算精度提升了 1~3 个数量级。这意味着若要达到相同精度, 对比方法所需时间至少为本文方法的 13 倍。与一种经典数值方法相比, 所提方法在时间上节省约 75%, 在精度上各有优劣, 但对比方法的计算精度在不同情况下波动较大, 而本文方法的计算精度则更加稳定。**结论** 所提方法在保持原有几何方法计算稳定性的基础上, 进一步提升了计算精度与计算效率, 实现了精度、效率与稳定性的兼顾, 从而展现出更高的实际应用价值。

关键词: 测地线; 曲率向量; 几何; 参数曲面; 初值问题

A geometric approach to the initial value problem of geodesics on parametric surfaces

Zhu Zijian, Fu Xiaoming*

School of Mathematical Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China

Abstract: Objective The initial value problem of geodesics on surfaces is not only a classical and fundamental issue in differential geometry but also a topic of considerable significance in a wide range of application domains. From a purely mathematical perspective, geodesics represent the natural generalization of straight lines to curved spaces. They describe the shortest or locally shortest paths constrained to lie on a given surface, thereby making them essential objects of study in Riemannian geometry and global analysis. Beyond mathematics, geodesics play a crucial role in fields such as geometric modeling, computer graphics, computer-aided design, robotics, and scientific computing. For example, in geometric modeling and shape analysis, geodesics are used for surface parameterization, shape matching, and feature extraction. In graphics processing, they provide efficient ways to compute distances, generate texture maps, and design deformations of complex surfaces. In scientific simulations, they are often indispensable for accurately capturing trajectories or flow lines

收稿日期: 2025-09-08; 修回日期: 2025-10-31; 预印本日期: 2025-11-07

* 通信作者: 傅孝明 fuxm@ustc.edu.cn

基金项目: 国家自然科学基金项目 (62272429)

Supported by: National Natural Science Foundation of China (62272429)

constrained by curved geometries. The wide-ranging importance of geodesics underscores the need for efficient, accurate, and stable computational methods. According to the traditional practice, geometric methods for computing geodesics attempt to exploit the intrinsic properties of curves on surfaces. A common strategy involves iteratively constructing the geodesic path by Taylor expansions. The position of the curve at subsequent steps can be estimated by applying Taylor expansions, thereby propagating the geodesic path forward. This geometric approach has the advantage of offering clear intuition and relatively simple formulations. However, in practice, it often encounters severe limitations in terms of accuracy and computational efficiency. Given that Taylor expansions truncate high-order terms, local errors accumulate along the geodesic trajectory, thereby resulting in noticeable global deviations. Furthermore, iterative propagation tends to involve repeated geometric computations that can be time-consuming for complex surfaces. Our work addresses these challenges by introducing several enhancements to the traditional geometric framework. **Method** The first and most important improvement builds on a key geometric property of geodesics: at any point on a smooth surface, the curvature vector of a geodesic lies parallel to the surface normal vector. This fact allows us to establish a direct and robust formulation for computing curvature vectors without relying on approximations that introduce unnecessary complexity or numerical instability. Given that arc-length-parametrized curves have tangent vectors of unit length, we can improve the computational accuracy even further. We derive a new method for computing the curvature vector that reduces the number of intermediate steps and eliminates certain sources of numerical error by combining these two observations. This approach not only makes the computation process straightforward but also significantly improves numerical accuracy. As a consequence, the overall geometric algorithm achieves a good balance between computational simplicity and precision. Second, related error estimations for the improved geometric method are provided. **Result** Extensive experimental evaluations have been conducted to validate the proposed method. Comparative studies were conducted with respect to one state-of-the-art geometric method and one classical numerical method. The results are compelling. Compared with the geometric method, our method reduces run time by approximately 25% in terms of computation time. This reduction translates to substantial savings when dealing with large-scale problems or real-time applications. The improvements in accuracy are particularly striking; our method achieves precision gains of 1 to 3 orders of magnitude over the geometric method. For perspective, the computation time needed by the geometric method should be at least 13 times that of our method to achieve the same level of accuracy. Such an improvement highlights the efficiency of our formulation and its potential to handle demanding computational tasks. In comparison with the numerical method, the advantages of the proposed method are equally noteworthy. In particular, the run time of our approach is reduced by approximately 75% relative to the numerical method, thereby making it significantly faster. In terms of accuracy, the numerical method can attain high accuracy under certain circumstances; however, it often exhibits substantial variability depending on the surface geometry. By contrast, our method provides consistently stable accuracy across different test cases, thereby demonstrating its robustness. This stability is particularly valuable in applications such as simulation or optimization. **Conclusion** The implications of these findings are broad. The proposed method offers a reliable solution for surface geodesic computation by integrating theoretical soundness with practical efficiency. It preserves the desirable property of computational stability inherited from the original geometric framework while simultaneously achieving high levels of accuracy and efficiency. The ability to balance these three aspects—precision, efficiency, and stability—is rarely observed in existing methods, which tend to optimize one aspect at the expense of the others. Consequently, the proposed method, which can meet the requirements of diverse applications ranging from academic research to industrial deployment, stands out as a more practical and versatile solution than existing methods. The contributions of this work can be summarized as follows. First, we introduce a novel formulation for computing the curvature vector of geodesics, grounded in fundamental geometric properties. This formulation simplifies computations while improving numerical accuracy. Second, we provide rigorous error estimations. Third, comprehensive experimental evaluations show that the performance of the proposed method is superior to that of the geometric method in accuracy and run time, whereas it outperforms the numerical method in terms of computational stability and efficiency. Together, these contributions establish a method that not only advances the state of the art in geodesic computation but also expands the practical applicability of geometric algorithms to highly challenging and large-scale scenarios.

Key words: geodesic; curvature vector; geometry; parametric surface; initial value problem

0 引言

曲面上的测地线是指测地曲率处处为零的曲线,它是一种内蕴的几何特征(陈维桓,2017)。测地线广泛应用于复合材料自动化制造过程中的仿真模拟,如胶带在复杂曲面上的铺设和织物的铺展(Debout等,2011)等操作。在丝材缠绕过程中,若曲面为无摩擦的凸曲面,丝材只能沿测地线铺设,否则无法完成铺设。除此之外,测地线还在众多先进几何处理功能中发挥关键作用,例如曲线偏移(Patrikalakis和Bardis,1989)与曲面设计(寿华好等,2019)。近年来,测地线在数控加工(Chen和Li,2016)、图像处理(Chen等,2021)、机器人学(Chen等,2016)以及医学(马亚奇等,2011)等领域的应用也日益深入,充分体现了其在高精度制造与几何建模中的核心价值。

曲面上的测地线问题通常分为两类:1)测地线的初值问题,即从某点出发沿给定方向构造唯一一条测地线;2)测地线的边值问题,即计算曲面上两点间的测地线。测地线的初值问题是计算几何与几何造型领域中的一个基础问题。迄今为止,已有多种经典方法用于求解该问题,主要包括解析方法(Do Carmo,1976)、数值方法(Beck等,1986)、离散方法(Kumar等,2003;Polthier和Schmies,2006;Cheng等,2016)和几何方法(Hotz和Hagen,2000;Zhang等,2015,2019)。解析方法试图直接求解复杂的测地线方程,以获得其解析表达式,但由于测地线方程高度复杂,该方法通常仅适用于特定曲面;数值方法则通过数值积分技术,对测地线方程进行近似求解,从而获得测地线的数值解;离散方法通常先将连续曲面离散化,然后在离散网格上计算近似测地线;几何方法则希望通过利用曲面和测地线的几何特性来简化计算。

在这4类方法中,数值方法和几何方法表现最为优越。Beck采用的四阶Runge-Kutta数值方法(RK4)(Beck等,1986),在理论上具有较高的精度,其全局误差为 $O(\Delta s^4)$,其中 O 在数学分析中用于描述步长 Δs 趋于零时误差的渐近阶。然而,该方法对条件的要求较为严苛,实际应用中往往难以完全满足,从而导致诸如计算精度受限、对不同测地线的计算精度波动较大等问题。几何方法由于利用了曲面

和测地线的几何性质,避免了解复杂的测地线方程,且简化了计算量,但现有的几何方法在计算效率和精度上仍存在改进空间。目前已提出的几何方法中,Zhang等人(2019)方法表现最优,其算法的核心是对曲线曲率向量 $r''(s)$ 的计算。然而,该方法在计算曲率向量时过程较为烦琐,且会引入额外误差,影响整体精度。

为此,本文在充分利用测地线几何性质的基础上,提出了一种简洁有效的曲率向量计算方法,该方法在简化计算流程的同时,可以准确地计算测地线在一点处的曲率向量,从而提升了几何算法的整体计算精度。此外,本文还对改进后的几何方法进行了理论分析,给出了相应的误差估计。

最后,本文将所提方法与Zhang等人(2019)方法及Beck的RK4数值方法(Beck等,1986)进行了多组对比实验。实验结果表明,在相同条件下,本文方法比Zhang等人(2019)方法在时间上节省了25%左右,精度上提高了1~3个数量级。这意味着,若Zhang等人(2019)方法欲达到与本文方法相当的计算精度,其所需的计算时间至少为本文方法的13倍。与Beck方法(Beck等,1986)相比,本文方法在时间上节省了约75%;在精度方面,两者各有优劣,然而Beck方法的计算精度在不同情形下波动较大,而本文方法则表现出更好的数值稳定性。

1 相关工作

1.1 初值问题

关于测地线的初值问题,Do Carmo(1976)采用解析方法求解测地线方程,可获得精确的测地线,然而,该方法计算复杂,且仅适用于简单曲面,对于稍复杂的曲面往往难以求得闭形式解。Beck等人(1986)使用四阶Runge-Kutta方法计算了双三次样条曲面上的测地路径,能得到较准确的结果,但计算耗时较长。Kumar等人(2003)研究了在离散化曲面上计算离散测地线。Polthier和Schmies(2006)在多边形曲面上提出了一种最直测地线的概念。该概念解决了离散网格上测地线初值问题解不唯一的难题。Cheng等人(2016)方法则从不同角度解决了该问题,且在低分辨率网格上求测地线的表现突出。Hotz和Hagen(2000)基于测地线是平面上直线的推

广这一基本性质,提出了一种在任意曲面上构造测地线的几何方法。该方法的优越性在于,它不依赖于曲面的复杂描述。但是该方法每一步都需要把在切平面上得到的点投影到曲面上,计算复杂。为此,Zhang 等人(2015)提出了一种直接在曲面上计算测地线的新方法,有效简化了计算流程。此后,Zhang 等人(2019)又对该方法进行了改进,进一步提高了计算精度。

1.2 边值问题

针对测地线的边值问题, Maekawa(1996)提出了一种基于向后差分的数值方法,用于在参数曲面上构造两点间的测地路径。欧阳宏等人(2008)将该方法推广至代数曲面上,扩展了其适用范围。Chen(2010)提出了一种“类测地线”曲线,随着曲线阶数的增加,该曲线可逐渐逼近曲面上的真实测地线。Kasap 等人(2005)通过有限差分法和迭代法求解测地线的非线性微分方程。Yuan 等人(2023)将两点间最短路径的问题转化为变分最小化问题,通过最小化变分能量,同时保证离散点列始终约束在曲面上来获得最短路径。该方法应用广泛,适用于网格、点云、隐式曲面和参数曲面。King 等人(2024)提出了一种基于热传导的测地线计算方法(heat method),适用于所有支持最近点查询的流形。Bose 等人(2011)、赵俊莉等人(2015)对在三维离散曲面上计算测地路径和测地距离的算法进行了系统综述。Kanai 和 Suzuki(2000)提出了一种在多边形曲面上计算近似最短路径的新方法。Wang 等人(2017)则提出了一种基于图的离散测地线计算方法。Martínez 等人(2005)、Surazhsky 等人(2005)、周刚等人(2010)以及 Sharp 和 Crane(2020)分别研究了在三角网格上求解测地路径的不同方法,其中,Sharp 和 Crane(2020)提出了一种仅通过边翻转即可构建两点间测地路径的算法;周刚等人(2010)基于 MMP(mitchell, mount, papadimitrious)方法,在实现三角网格上测地线计算的同时,修正了 Surazhsky 等人(2005)采用的测地线算法中的误差。此外, Potamias 等人(2022)尝试引入机器学习方法,在离散图结构中搜索最短路径。Bulut 等人(2024)基于 Q 学习算法,在准可展 Bézier 曲面上实现了两点间最短路径的计算。尽管该方法在一定程度上可行,但其训练成本高、计算耗时长且泛化能力较差,限制了其实际应用。

2 方法

由于在论述过程中需要使用大量符号,本文首先将所要用的符号单独列出,如表 1 所示。

表 1 符号表
Table 1 Symbol table

符号	描述	所在空间
S	参数曲面	3D 空间
C	曲面 S 上的测地线	3D 空间
C'	曲线 C 在参数域内的原像	参数域
n	曲面 S 的单位法向量	3D 空间
E	$S_u \cdot S_u$	实数域 \mathbf{R}
F	$S_u \cdot S_v$	实数域 \mathbf{R}
G	$S_v \cdot S_v$	实数域 \mathbf{R}
L	$S_{uu} \cdot n$	实数域 \mathbf{R}
M	$S_{uv} \cdot n$	实数域 \mathbf{R}
N	$S_v \cdot n$	实数域 \mathbf{R}
I	$E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2$	实数域 \mathbf{R}
II	$L(u')^2 + 2Mu'v' + N(v')^2$	实数域 \mathbf{R}
κ_{sn}	III	实数域 \mathbf{R}
q_0	曲线 C 上的起点	3D 空间
h_0	q_0 在参数域内的原像	参数域
T_0	曲线 C 在 q_0 处的单位切向量	3D 空间
L_0	曲线 C' 在 h_0 处的切向量	参数域
$r''(s_0)$	曲线 C 在 q_0 处的二阶导	3D 空间
M_0	曲线 C' 在 h_0 处的二阶导	参数域
n_0	曲面 S 在 q_0 处的单位法向量	3D 空间
h_i	根据本文方法在第 i 步求得的点的位置	参数域
\bar{h}_i	h_i 的真实位置	参数域
q_i	h_i 在曲面 S 上的对应点	3D 空间
\bar{q}_i	\bar{h}_i 在曲面 S 上的对应点	3D 空间
T_i	第 i 步求得的 q_i 处的单位切向量	3D 空间
\bar{T}_i	\bar{q}_i 处的单位切向量	3D 空间
L_i	曲线 C' 在 h_i 处的切向量	参数域
\bar{L}_i	曲线 C' 在 \bar{h}_i 处的切向量	参数域
M_i	曲线 C' 在 h_i 处的二阶导	参数域
\bar{M}_i	曲线 C' 在 \bar{h}_i 处的二阶导	参数域

2.1 问题定义

设 $S(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)]$ 为光滑的正则曲面 S 的参数方程, 其中, u 和 v 是参数域内的参数, $x(u, v)$ 、 $y(u, v)$ 和 $z(u, v)$ 是参数 u 和 v 的可微函数。一条完全位于曲面 S 上的曲线 C 可以用参数形式表示为 $r(s)$, 其在参数域内的原像 C' 可以表示为 $u = u(s)$, $v = v(s)$, s 是弧长参数。

令 q_0 表示三维空间中曲线 C 的起始点, T_0 表示曲线 C 在 q_0 处的单位切向量。测地线的初值问题即在给定起始点 $q_0 = S(u_0, v_0)$ 和初始方向 T_0 的条件下, 求以 q_0 为起始点、 T_0 为初始方向的曲面 S 上的测地线轨迹。

2.2 Zhang 的几何方法回顾

已知起始点的位置 $h_0 = (u_0, v_0)$ 和初始方向 T_0 , 可通过下式得到参数域内的初始方向 $L_0 = (u'(s_0), v'(s_0))$, 具体为

$$r'(s) = S_u u'(s) + S_v v'(s) \tag{1}$$

式中, $r'(s)$ 是 $r(s)$ 的一阶导, S_u, S_v 是 $S(u, v)$ 关于 u, v 的一阶偏导 $S_u(u, v), S_v(u, v)$, $u'(s), v'(s)$ 是 $u(s), v(s)$ 的一阶导。

然后, 通过下式得到下一个点的大致位置 h_1 , 具体为

$$h_1 = h_0 + L_0 \Delta s \tag{2}$$

若能求得曲线的曲率向量 $r''(s)$, 则根据下式可得到下一点处的大致方向 T_1 , 具体为

$$T_1 = T_0 + r''(s_0) \Delta s \tag{3}$$

式中, $r''(s)$ 是 $r(s)$ 的二阶导。

得到 h_1 和 T_1 后, 不断重复上述过程, 可以得到一系列点, 直到边界。

Zhang 等人 (2015) 的主要工作是通过 $-(n_1 \cdot T_0) / \Delta s$ 逼近 $r''(s_0)$, 其中 n_1 为曲面在 q_1 点处的单位法向量, 可通过 $n = (S_u \times S_v) / \|S_u \times S_v\|$ 求得。Zhang 等人 (2015) 方法得到的点的截断误差为 $O(\Delta s^2)$ 。

在已知 $r''(s)$ 和 L_0 情况下, 可根据式 (4) 得到曲线在参数域内的二阶导 $M_0 = (u''(s_0), v''(s_0))$, 具体为

$$r''(s) = S_{uu} u''(s) + S_{vv} v''(s) + 2S_{uv} u'(s)v'(s) + S_{uu}(u'(s))^2 + S_{vv}(v'(s))^2 \tag{4}$$

式中, S_{uu}, S_{uv}, S_{vv} 是 $S(u, v)$ 关于 u, v 的二阶偏导 $S_{uu}(u, v), S_{uv}(u, v), S_{vv}(u, v)$, $u''(s), v''(s)$ 是 $u(s), v(s)$

的二阶导。

Zhang 等人 (2019) 的主要工作是将求点位置的一阶泰勒展开式提升到了二阶, 即用下式代替式 (2), 具体为

$$h_1 = h_0 + L_0 \Delta s + \frac{1}{2} M_0 \Delta s^2 \tag{5}$$

于是, 根据式 (5) 可得到下一个点 h_1 更准确的位置, Zhang 等人 (2019) 的方法求得点的截断误差为 $O(\Delta s^3)$ 。

但 Zhang 等人 (2019) 计算 $r''(s)$ 采用的仍是 Zhang 等人 (2015) 的方法。即先用式 (2) 得到“下一点” h'_1 的位置, 再计算 h'_1 处的单位法向量 n'_1 , 用于逼近 h_0 处的曲率向量 $r''(s)$ 。得到 $r''(s)$ 近似值后, 通过式 (4) 得到 M_0 , 再用式 (5) 求得下一个点 h_1 的位置, 如图 1 所示。这样计算 $r''(s)$ 引入了计算误差, 且计算较为烦琐。相较之下, 本文方法充分利用曲面上测地线的几何性质, 不仅能够精确计算测地线在一点处的曲率向量 $r''(s)$, 同时简化了计算流程。因此, 改进后的几何方法在计算时间与精度上均优于 Zhang 等人 (2019) 方法。下面给出具体的计算方法及其理论依据。

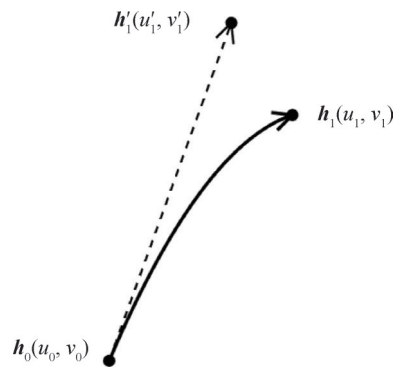


图1 Zhang 等人 (2019) 方法
Fig. 1 Zhang et al. (2019) method

2.3 改善方法

为了方便表示, 令

$$\begin{aligned} E &= S_u \cdot S_u, F = S_u \cdot S_v, G = S_v \cdot S_v \\ L &= S_{uu} \cdot n, M = S_{uv} \cdot n, N = S_{vv} \cdot n \\ I &= E(u'(s))^2 + 2Fu'(s)v'(s) + G(v'(s))^2 \\ II &= L(u'(s))^2 + 2Mu'(s)v'(s) + N(v'(s))^2 \\ \kappa_{sn} &= \frac{II}{I} \end{aligned}$$

定理 1. 测地曲线 C 上一点处的曲率向量 $r''(s) = \kappa_{sn} \cdot n$ 。

证明:根据微分几何的知识(陈维桓,2017),曲面上一条曲线是测地线当且仅当曲线的主法向量 β 处处平行于曲面的单位法向量 n ,于是有

$$r''(s) = (r''(s) \cdot n) \cdot n$$

其中

$$\begin{aligned} r''(s) \cdot n &= \\ (S_u u''(s) + S_v v''(s) + S_{uu} (u'(s))^2 + \\ & 2S_{uv} u'(s)v'(s) + S_{vv} (v'(s))^2) \cdot n = \\ S_{uu} \cdot n \cdot (u'(s))^2 + 2S_{uv} \cdot n \cdot u'(s)v'(s) + \\ & S_{vv} \cdot n \cdot (v'(s))^2 = \\ L(u'(s))^2 + 2Mu'(s)v'(s) + N(v'(s))^2 \end{aligned}$$

又因为 s 为弧长参数,所以有 $\|r'(s)\|^2 = 1$,且

$$\begin{aligned} \|r'(s)\|^2 &= \\ (S_u u'(s) + S_v v'(s)) \cdot (S_u u'(s) + S_v v'(s)) &= \\ S_u \cdot S_u \cdot (u'(s))^2 + 2S_{uv} \cdot S_v \cdot u'(s)v'(s) + \\ & S_v \cdot S_v \cdot (v'(s))^2 = \\ E(u'(s))^2 + 2Fu'(s)v'(s) + G(v'(s))^2 \end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned} r''(s) \cdot n &= \\ \frac{L(u'(s))^2 + N(v'(s))^2 + 2Mu'(s)v'(s)}{L(u'(s))^2 + N(v'(s))^2 + 2Mu'(s)v'(s)} &= \\ \frac{1}{\|r'(s)\|} &= \\ \frac{L(u'(s))^2 + N(v'(s))^2 + 2Mu'(s)v'(s)}{E(u'(s))^2 + G(v'(s))^2 + 2Fu'(s)v'(s)} &= \frac{II}{I} = \kappa_{sn} \end{aligned}$$

最终可得

$$r''(s) = \kappa_{sn} \cdot n \tag{6}$$

证毕。

已知初始点的位置 h_0 和初始方向 T_0 ,可以根据如下步骤1)一步骤5)求出下一个点的位置 h_1 和切向量 T_1 ,不断重复步骤1)一步骤6),可以得到一系列点,直至到达边界。依次连接这一系列点便得到了参数域内的测地路径。整个算法的流程如下:

- 1)由式(1)将 T_0 拉回参数域中得到 L_0 。
- 2)由式(6)得到 h_0 处法曲率向量 $r''(s)$ 。
- 3)由式(3)得到下一点处的切向量 T_1 。
- 4)由式(4)将 $r''(s)$ 拉回参数域中得到 M_0 。
- 5)由式(5)得到下一个点的位置 h_1 。
- 6) h_1 和 T_1 用于求下一个点的位置和切向量。

2.4 误差分析

令 $h_i = (u_i, v_i)$ 表示由本文方法在第 $i(i \geq 0)$ 步得到的点的位置, $\bar{h}_i = (\bar{u}_i, \bar{v}_i)$ 表示其实际上真正的位置。

q_i 和 \bar{q}_i 分别为 h_i 和 \bar{h}_i 在曲面 S 上的对应点。 L_i 表示由本文方法在第 i 步得到的曲线 C' 在 h_i 处的切向量, \bar{L}_i 为曲线 C' 在 \bar{h}_i 处的切向量。 M_i 表示由本文方法在第 i 步得到的曲线 C' 在 h_i 处的二阶导, \bar{M}_i 为曲线 C' 在 \bar{h}_i 处的二阶导。

定理2. 若曲面为光滑的正则参数曲面,则有 $\bar{h}_1 = h_1 + O(\Delta s^3)$, $\bar{L}_1 = L_1 + O(\Delta s^2)$, $\bar{M}_1 = M_1 + O(\Delta s^2)$ 。

证明:由于 $h_1 = h_0 + L_0 \Delta s + \frac{1}{2} M_0 \Delta s^2$,

$$\bar{h}_1 = \bar{h}_0 + \bar{L}_0 \Delta s + \frac{1}{2} \bar{M}_0 \Delta s^2 + O(\Delta s^3),$$

$$L_1 = L_0 + M_0 \Delta s, \bar{L}_1 = \bar{L}_0 + \bar{M}_0 \Delta s + O(\Delta s^3)$$

所以

$$\bar{h}_1 = h_1 + O(\Delta s^3), \bar{L}_1 = L_1 + O(\Delta s^2) \tag{7}$$

由式(4)可得

$$S_u u''(s) + S_v v''(s) = r''(s) - 2S_{uv} u'(s)v'(s) - S_{uu} (u'(s))^2 - S_{vv} (v'(s))^2$$

写成矩阵的形式,即为 $[S_u \ S_v] \begin{bmatrix} u''(s) \\ v''(s) \end{bmatrix} = N$ 。其中, $N = r''(s) - 2S_{uv} u'(s)v'(s) - S_{uu} (u'(s))^2 - S_{vv} (v'(s))^2$ 。

等式两边同时左乘 $[S_u \ S_u]^T$,可得

$$\begin{bmatrix} \|S_u\|^2 & S_u^T S_v \\ S_u^T S_v & \|S_v\|^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u''(s) \\ v''(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_u^T N \\ S_v^T N \end{bmatrix}$$

另外

$$\begin{aligned} S_u(\bar{h}_1) &= S_u(h_1 + O(\Delta s^3)) = S_u(h_1) + \\ S_{uu}(h_1)O(\Delta s^3) + S_{uv}(h_1)O(\Delta s^3) + O(\Delta s^6) &= \\ S_u(h_1) + O(\Delta s^3) \end{aligned}$$

同理,可得

$$\begin{aligned} S_v(\bar{h}_1) &= S_v(h_1) + O(\Delta s^3), S_{uu}(\bar{h}_1) = S_{uu}(h_1) + \\ & O(\Delta s^3) \\ S_{uv}(\bar{h}_1) &= S_{uv}(h_1) + O(\Delta s^3), S_{vv}(\bar{h}_1) = S_{vv}(h_1) + \\ & O(\Delta s^3) \end{aligned}$$

又有

$$\begin{aligned} n|_{\bar{q}_1} &= \frac{S_u(\bar{h}_1) \times S_v(\bar{h}_1)}{\|S_u(\bar{h}_1) \times S_v(\bar{h}_1)\|} = \\ \frac{S_u(h_1) \times S_v(h_1)}{\|S_u(h_1) \times S_v(h_1)\|} \cdot \frac{\|S_u(h_1) \times S_v(h_1)\|}{\|S_u(\bar{h}_1) \times S_v(\bar{h}_1)\|} \end{aligned}$$

式中, $n|_{\bar{q}_1}$ 为曲面在 \bar{q}_1 处的单位法向量。

结合 $1/(1 + O(\Delta s)) = 1 - O(\Delta s) = 1 + O(\Delta s)$,可得

$$\mathbf{n}|_{\bar{q}_i} = (\mathbf{n}|_{q_i} + \mathbf{O}(\Delta s^3))(1 + \mathbf{O}(\Delta s^3)) = \mathbf{n}|_{q_i} + \mathbf{O}(\Delta s^3)$$

式中, $\mathbf{n}|_{q_i}$ 为曲面在 q_i 处的单位法向量。

对于 L, M, N, E, F, G , 有

$$\begin{aligned} L|_{\bar{q}_i} &= (\mathbf{S}_{uu} \cdot \mathbf{n})|_{\bar{q}_i} = \\ &(\mathbf{S}_{uu}(\mathbf{h}_1) + \mathbf{O}(\Delta s^3)) \cdot (\mathbf{n}|_{q_i} + \mathbf{O}(\Delta s^3)) = \\ &\mathbf{S}_{uu}(\mathbf{h}_1) \cdot \mathbf{n}|_{q_i} + \mathbf{O}(\Delta s^3) = L|_{q_i} + \mathbf{O}(\Delta s^3) \end{aligned}$$

同理,

$$\begin{aligned} M|_{\bar{q}_i} &= M|_{q_i} + \mathbf{O}(\Delta s^3), N|_{\bar{q}_i} = N|_{q_i} + \mathbf{O}(\Delta s^3) \\ E|_{\bar{q}_i} &= E|_{q_i} + \mathbf{O}(\Delta s^3), F|_{\bar{q}_i} = F|_{q_i} + \mathbf{O}(\Delta s^3) \\ G|_{\bar{q}_i} &= G|_{q_i} + \mathbf{O}(\Delta s^3) \end{aligned}$$

其中, $L|_{\bar{q}_i}, M|_{\bar{q}_i}, N|_{\bar{q}_i}, E|_{\bar{q}_i}, F|_{\bar{q}_i}, G|_{\bar{q}_i}$ 分别表示 L, M, N, E, F, G 在 \bar{q}_i 处的取值; $L|_{q_i}, M|_{q_i}, N|_{q_i}, E|_{q_i}, F|_{q_i}, G|_{q_i}$ 分别表示 L, M, N, E, F, G 在 q_i 处的取值。

$$\text{由式(7)知, } u'(s)|_{\bar{h}_i} = u'(s)|_{h_i} + \mathbf{O}(\Delta s^2)$$

$$v'(s)|_{\bar{h}_i} = v'(s)|_{h_i} + \mathbf{O}(\Delta s^2)$$

其中, $u'(s)|_{\bar{h}_i}, v'(s)|_{\bar{h}_i}$ 分别表示 $u'(s), v'(s)$ 在 \bar{h}_i 处的取值; $u'(s)|_{h_i}, v'(s)|_{h_i}$ 分别表示 $u'(s), v'(s)$ 在 h_i 处的取值。

因此, 对于 I, II 有

$$\begin{aligned} I|_{\bar{q}_i} &= (E(u'(s))^2 + 2Fv'(s)v(s) + G(v'(s))^2)|_{\bar{q}_i} = \\ &I|_{q_i} + \mathbf{O}(\Delta s^2) \end{aligned}$$

同理, 可得

$$II|_{\bar{q}_i} = II|_{q_i} + \mathbf{O}(\Delta s^2)$$

于是

$$\kappa_{sn}|_{\bar{q}_i} = \frac{II_{\bar{q}_i}}{I_{\bar{q}_i}} = \frac{II|_{q_i} + \mathbf{O}(\Delta s^2)}{I|_{q_i} + \mathbf{O}(\Delta s^2)} = \kappa_{sn}|_{q_i} + \mathbf{O}(\Delta s^2)$$

式中, $I_{\bar{q}_i}, II_{\bar{q}_i}, \kappa_{sn}|_{\bar{q}_i}$ 分别表示 I, II, κ_{sn} 在 \bar{q}_i 处的值; $I_{q_i}, II_{q_i}, \kappa_{sn}|_{q_i}$ 分别表示 I, II, κ_{sn} 在 q_i 处的值。

进而有

$$\begin{aligned} \mathbf{r}''(s)|_{\bar{q}_i} &= (\kappa_{sn} \cdot \mathbf{n})|_{\bar{q}_i} = \\ &(\kappa_{sn}|_{q_i} + \mathbf{O}(\Delta s^2)) \cdot (\mathbf{n}|_{q_i} + \mathbf{O}(\Delta s^3)) = \\ &(\kappa_{sn} \cdot \mathbf{n})|_{q_i} + \mathbf{O}(\Delta s^2) = \mathbf{r}''(s)|_{q_i} + \mathbf{O}(\Delta s^2) \end{aligned}$$

$$\text{因此有 } N|_{\bar{q}_i} = N|_{q_i} + \mathbf{O}(\Delta s^2)$$

式中, $\mathbf{r}''(s)|_{\bar{q}_i}, N|_{\bar{q}_i}$ 分别表示 $\mathbf{r}''(s), N$ 在 \bar{q}_i 处的值;

$\mathbf{r}''(s)|_{q_i}, N|_{q_i}$ 分别表示 $\mathbf{r}''(s), N$ 在 q_i 处的值。

将

$$\begin{bmatrix} \|S_u\|^2 & S_u^T S_v \\ S_u^T S_v & \|S_v\|^2 \end{bmatrix}|_{\bar{q}_i} = \begin{bmatrix} \|S_u\|^2 & S_u^T S_v \\ S_u^T S_v & \|S_v\|^2 \end{bmatrix}|_{q_i} + \mathbf{O}(\Delta s^3)$$

代入

$$\begin{bmatrix} \|S_u\|^2 & S_u^T S_v \\ S_u^T S_v & \|S_v\|^2 \end{bmatrix}|_{\bar{q}_i} \begin{bmatrix} u''(s) \\ v''(s) \end{bmatrix}|_{\bar{h}_i} = \begin{bmatrix} S_u^T N \\ S_v^T N \end{bmatrix}|_{\bar{q}_i}$$

可得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \|S_u\|^2 & S_u^T S_v \\ S_u^T S_v & \|S_v\|^2 \end{bmatrix}|_{q_i} \begin{bmatrix} u''(s) \\ v''(s) \end{bmatrix}|_{\bar{h}_i} + \mathbf{O}(\Delta s^3) = \\ \begin{bmatrix} S_u^T N \\ S_v^T N \end{bmatrix}|_{q_i} + \mathbf{O}(\Delta s^2) \end{aligned}$$

式中, $[]|_{\bar{q}_i}, []|_{q_i}$ 分别表示矩阵 $[]$ 在 \bar{q}_i, q_i 处的值,

$[]|_{\bar{h}_i}$ 表示矩阵 $[]$ 在 \bar{h}_i 处的取值。

进而有

$$\begin{bmatrix} \|S_u\|^2 & S_u^T S_v \\ S_u^T S_v & \|S_v\|^2 \end{bmatrix}|_{q_i} \left(\begin{bmatrix} u''(s) \\ v''(s) \end{bmatrix}|_{\bar{h}_i} - \begin{bmatrix} u''(s) \\ v''(s) \end{bmatrix}|_{h_i} \right) = \mathbf{O}(\Delta s^2)$$

式中, $[]|_{h_i}$ 表示矩阵 $[]$ 在 h_i 处的值。

$$\text{化简后, 可得 } \begin{bmatrix} u''(s) \\ v''(s) \end{bmatrix}|_{\bar{h}_i} = \begin{bmatrix} u''(s) \\ v''(s) \end{bmatrix}|_{h_i} + \mathbf{O}(\Delta s^2)$$

即 $\bar{M}_i = M_i + \mathbf{O}(\Delta s^2)$ 。证毕。

定理3. 若曲面为光滑的正则参数曲面, 且有

$$\bar{h}_i = h_i + \mathbf{O}(\Delta s^3), \bar{L}_i = L_i + \mathbf{O}(\Delta s^2),$$

$$\bar{M}_i = M_i + \mathbf{O}(\Delta s^2),$$

则 $\bar{h}_{i+1} = h_{i+1} + \mathbf{O}(\Delta s^3), \bar{L}_{i+1} = L_{i+1} + \mathbf{O}(\Delta s^2),$

$$\bar{M}_{i+1} = M_{i+1} + \mathbf{O}(\Delta s^2), \text{ 其中 } i \geq 0.$$

证明: 由条件知: $h_i = \bar{h}_i + \mathbf{O}(\Delta s^3), L_i = \bar{L}_i + \mathbf{O}(\Delta s^2), M_i = \bar{M}_i + \mathbf{O}(\Delta s^2)$

将其代入

$$h_{i+1} = h_i + L_i \Delta s + \frac{1}{2} M_i \Delta s^2, L_{i+1} = L_i + M_i \Delta s$$

可得

$$h_{i+1} = \bar{h}_i + \bar{L}_i \Delta s + \frac{1}{2} \bar{M}_i \Delta s^2 + \mathbf{O}(\Delta s^3)$$

$$L_{i+1} = \bar{L}_i + \bar{M}_i \Delta s + \mathbf{O}(\Delta s^2)$$

又因为

$$\bar{h}_{i+1} = \bar{h}_i + \bar{L}_i \Delta s + \frac{1}{2} \bar{M}_i \Delta s^2 + \mathbf{O}(\Delta s^3)$$

$$\overline{L_{i+1}} = \overline{L_i} + \overline{M_i} \Delta s + O(\Delta s^2)$$

因此

$$\overline{h_{i+1}} = h_{i+1} + O(\Delta s^3), \overline{L_{i+1}} = L_{i+1} + O(\Delta s^3)$$

根据定理2的证明,同理可知

$$S_u(\overline{h_{i+1}}) = S_u(h_{i+1}) + O(\Delta s^3)$$

$$S_v(\overline{h_{i+1}}) = S_v(h_{i+1}) + O(\Delta s^3)$$

$$S_{uu}(\overline{h_{i+1}}) = S_{uu}(h_{i+1}) + O(\Delta s^3)$$

$$S_{uv}(\overline{h_{i+1}}) = S_{uv}(h_{i+1}) + O(\Delta s^3)$$

$$S_{vv}(\overline{h_{i+1}}) = S_{vv}(h_{i+1}) + O(\Delta s^3)$$

进而有

$$n \Big|_{\overline{q_{i+1}}} = n \Big|_{q_{i+1}} + O(\Delta s^3), \kappa_{sn} \Big|_{\overline{q_{i+1}}} = \kappa_{sn} \Big|_{q_{i+1}} + O(\Delta s^2)$$

$$r''(s) \Big|_{\overline{q_{i+1}}} = r''(s) \Big|_{q_{i+1}} + O(\Delta s^2)$$

$$N \Big|_{\overline{q_{i+1}}} = N \Big|_{q_{i+1}} + O(\Delta s^2)$$

$$\begin{bmatrix} u''(s) \\ v''(s) \end{bmatrix} \Big|_{\overline{h_{i+1}}} = \begin{bmatrix} u''(s) \\ v''(s) \end{bmatrix} \Big|_{h_{i+1}} + O(\Delta s^2)$$

即 $\overline{M_{i+1}} = M_{i+1} + O(\Delta s^2)$ 。式中, $n \Big|_{\overline{q_{i+1}}}$ 、 $\kappa_{sn} \Big|_{\overline{q_{i+1}}}$ 、 $r''(s) \Big|_{\overline{q_{i+1}}}$ 、 $N \Big|_{\overline{q_{i+1}}}$ 分别表示 n 、 κ_{sn} 、 $r''(s)$ 、 N 在 $\overline{q_{i+1}}$ 处的值; $n \Big|_{q_{i+1}}$ 、 $\kappa_{sn} \Big|_{q_{i+1}}$ 、 $r''(s) \Big|_{q_{i+1}}$ 、 $N \Big|_{q_{i+1}}$ 分别表示 n 、 κ_{sn} 、 $r''(s)$ 、 N 在 q_{i+1} 处的值; $\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \Big|_{\overline{h_{i+1}}}$ 、 $\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \Big|_{h_{i+1}}$ 分别表示矩阵 $\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$ 在 $\overline{h_{i+1}}$ 、 h_{i+1} 处的值。证毕。

由定理2和定理3,可以得到第 i ($i \geq 0$) 个点处的位置误差 $E_i^p = h_i - \overline{h_i} = O(\Delta s^3)$,即存在 $U_i > 0$,使得 $h_i = \overline{h_i} + U_i \Delta s^3$,其中 U_i 仅依赖于 i 。

3 实验对比

本实验使用 Visual Studio 2022 编程,在一台配置为 AMD Ryzen 9 7945HX, 5.4 GHz, 16 GB 内存, NVIDIA GeForce RTX 4060 Laptop GPU 8 GB, 1 TB SSD 的笔记本电脑上运行。

本文将所提方法与当前表现较优的 Zhang 方法 (Zhang 等, 2019) 和 Beck 的 RK4 方法 (Beck 等, 1986) 进行对比实验。具体地,对这3种方法分别记录它们在一组相同步长下的计算误差和计算时间。误差的计算方式如下:曲线从初始点出发,直至到达边界停止,与边界有一个交点,记为 $h_{co}(u(s_{co}), v(s_{co}))$,这个方向上的真实的测地线也会与曲面边界有交点,记为 $h_{id}(u(s_{id}), v(s_{id}))$ 。将 $h_{co}(u(s_{co}), v(s_{co}))$ 和 $h_{id}(u(s_{id}), v(s_{id}))$ 之间在 L1 度量下的距离,即 $dt =$

$|u(s_{co}) - u(s_{id})| + |v(s_{co}) - v(s_{id})|$ 作为衡量误差的标准。鉴于 Zhang 等人 (2015) 证明其方法整体误差为 $O(\Delta s)$,且其在后续工作 (Zhang 等, 2019) 中对该方法进行了优化与改进,因此,如无特别说明,本文都采用 Zhang 等人 (2019) 方法并设定极小步长,用以近似真实的测地线。实验中如无特别说明,都选取固定的初始点 $h_0 = (0, 0)$,并统一采用固定步长。

在给定初始方向 $du:dv = du_0:dv_0$ 的条件下,可由式 (1) 得到其在曲面上的初始方向向量 $r'(s_0)$,进而可通过 $(du, dv) = (1/\|r'(s_0)\| \cdot du_0, 1/\|r'(s_0)\| \cdot dv_0)$ 求得该初始方向在参数域的具体数值。

求曲线与参数域边界的交点 $h_{co}(u(s_{co}), v(s_{co}))$ 的具体方法为:在计算过程中,若某一个点 $h_{be}(u(s_{be}), v(s_{be}))$ 的坐标超出参数域边界,则先判断该点的 u 坐标是否越界。

若 u 坐标超出边界,则根据式 (5) 和 h_{be} 的上一个点 h_{be-1} 的坐标信息,可反解出从 h_{be-1} 出发、恰好到达 u 边界所需的步长 Δs ,由于所解的方程是一元二次方程,因此会得到两个解 $\Delta s_1, \Delta s_2$ 。若 $\Delta s_1 \cdot \Delta s_2 < 0$,则选大于0的 Δs 作为步长,来求得 h_{be-1} 下一个点的位置 $h_{e1}(u(s_{e1}), v(s_{e1}))$ 。若 $\Delta s_1 \cdot \Delta s_2 \geq 0$,则选绝对值较小的 Δs 作为步长,来求得 h_{be-1} 下一个点的位置 $h_{e1}(u(s_{e1}), v(s_{e1}))$ 。若 $h_{e1}(u(s_{e1}), v(s_{e1}))$ 的 v 坐标也在边界范围内,则将 $h_{e1}(u(s_{e1}), v(s_{e1}))$ 记为曲线与参数域边界的交点 $h_{co}(u(s_{co}), v(s_{co}))$ 。但若 $h_{e1}(u(s_{e1}), v(s_{e1}))$ 的 v 坐标超出边界,则可采用同样的方法,计算恰好到达 v 边界所需的步长 $\Delta s_1, \Delta s_2$,并依据上述原则选择合适的 Δs ,从而得到新的点位置 $h_{e2}(u(s_{e2}), v(s_{e2}))$,此时,该点即为曲线与参数域边界的交点 $h_{co}(u(s_{co}), v(s_{co}))$ 。

若 u 坐标在边界范围内,但 v 坐标超出边界,则只需将上一段中的 u, v 交换,即可得到相应的交点 $h_{co}(u(s_{co}), v(s_{co}))$ 。

曲面1为一个 4×4 的 B 样条曲面,如图2所示。其控制点为: $(0, 0, 4), (2, 0, 1), (4, 0, 7), (6, 0, 3), (8, 0, 9), (10, 0, 2), (12, 0, 5); (0, 2, 9), (2, 2, 6), (4, 2, 8), (6, 2, 5), (8, 2, 3), (10, 2, 7), (12, 2, 4); (0, 4, 3), (2, 4, 4), (4, 4, 2), (6, 4, 9), (8, 4, 1), (10, 4, 6), (12, 4, 7); (0, 6, 7), (2, 6, 0), (4, 6, 1), (6, 6, 16), (8, 6, 4), (10, 6, 8), (12, 6, 2); (0, 8, 5), (2, 8, 3), (4, 8, 6), (6, 8, 8), (8, 8, 30), (10, 8, 9),$

(12, 8, 1); (0, 10, 2), (2, 10, 9), (4, 10, 4), (6, 10, 2), (8, 10, 5), (10, 10, 3), (12, 10, 6); (0, 12, 8), (2, 12, 5), (4, 12, 0), (6, 12, 7), (8, 12, 6), (10, 12, 1), (12, 12, 9); u 方向的节点向量为(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.333 3, 0.666 7, 1, 1, 1, 1, 1), v 方向的节点向量为(0, 0, 0, 0, 0, 0.333 3, 0.666 7, 1, 1, 1, 1, 1)。在其上沿3个不同的初始方向 $du : dv = 1.1 : 1.0$, $du : dv = 1 : 1$, $du : dv = 0.9 : 1.0$ 计算测地线, 所得路径分别以红、绿、蓝三色绘制。

曲面1的实验结果见图3—图5。由图3(a)和图4(a)可以看出, 在相同步长条件下, 本文方法在计算精度上较Zhang方法提升了约1个数量级。在 $du : dv = 1.1 : 1.0$ 方向, 如图5(a)所示, 精度提升达到3个数量级。虽然Beck的数值方法在计算精度上表现最优, 但其存在明显缺陷, 即精度存在上限, 且该上限会随测地路径的改变而变化: 如在

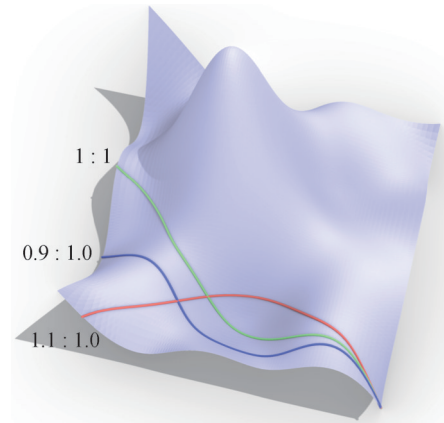
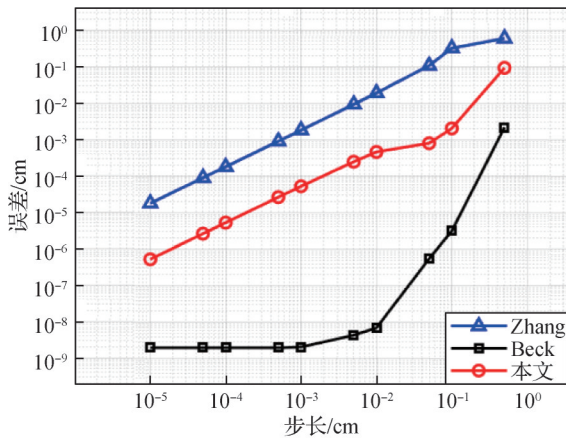


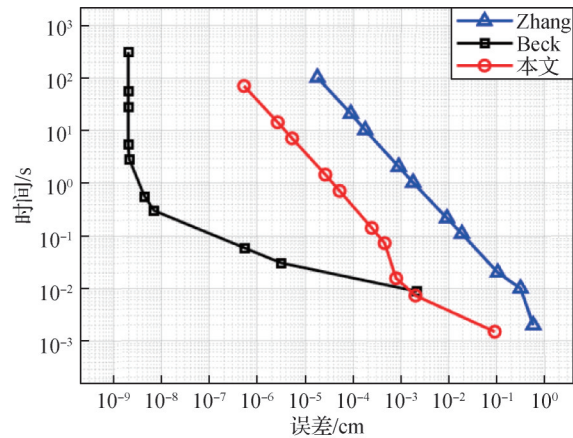
图2 曲面1及沿3个不同方向的测地线

Fig. 2 Surface 1 and geodesics along three different directions

$du : dv = 1 : 1$ 方向其精度上限为 10^{-9} , 而在 $du : dv = 0.9 : 1.0$ 方向其精度上限只有 10^{-7} , 这意味着该方法在对精度要求极高的应用中可能无法胜任。相比之下, 本文方法具有更强的精度可控性,



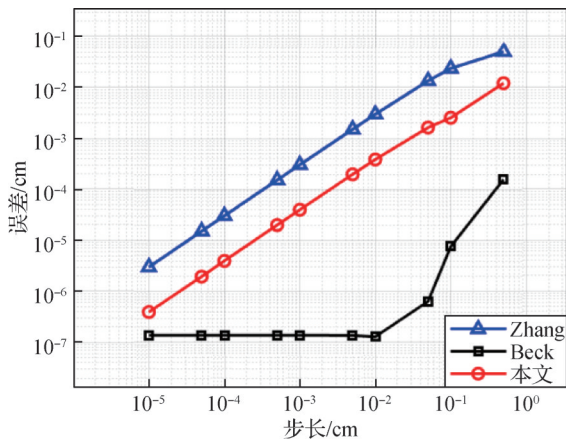
(a) 步长误差对比图



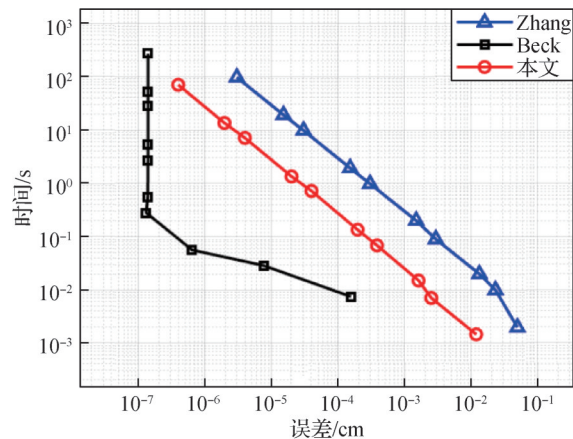
(b) 误差时间对比图

图3 曲面1在 $du : dv = 1 : 1$ 方向的对比图

Fig. 3 Comparison on Surface 1 in $du : dv = 1 : 1$ ((a) error versus step size; (b) computation time versus error)



(a) 步长误差对比图



(b) 误差时间对比图

图4 曲面1在 $du : dv = 0.9 : 1.0$ 方向的对比图

Fig. 4 Comparison on Surface 1 in $du : dv = 0.9 : 1.0$ ((a) error versus step size; (b) computation time versus error)

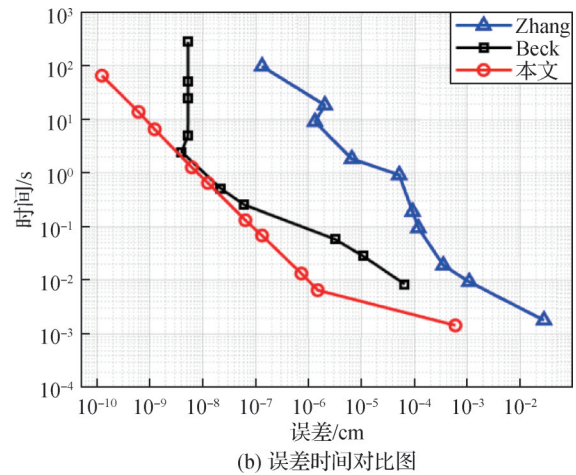
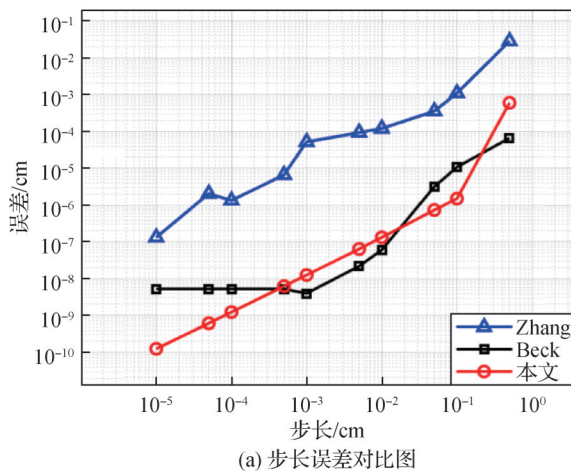


图5 曲面1在 $du : dv = 1.1 : 1.0$ 方向的对比图

Fig. 5 Comparison on Surface 1 in $du : dv = 1.1 : 1.0$ ((a) error versus step size; (b) computation time versus error)

随着步长的减小,误差可持续下降,如图5(a)所示,展现出良好的收敛性和适应性。

曲面2为一个 2×2 的B样条曲面,如图6所示。其控制点为: $(0, 0, 0), (3, 0, 3), (6, 0, 3), (9, 0, 0); (0, 2, 2), (3, 2, 5), (6, 2, 5), (9, 2, 2); (0, 4, 0), (3, 4, 3), (6, 4, 3), (9, 4, 0)$; u 方向的节点向量为 $(0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1)$, v 方向的节点向量为 $(0, 0, 0, 1, 1, 1)$ 。在其上沿3个不同的初始方向 $du : dv = 2 : 1, du : dv = 1 : 1, du : dv = 1 : 2$ 计算测地线,所得路径分别以红、绿、蓝三色绘制。

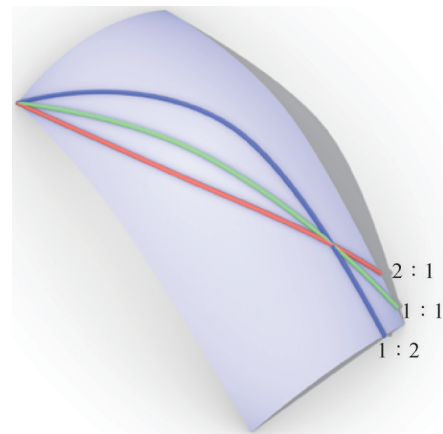


图6 曲面2及沿3个不同方向的测地线

Fig. 6 Surface 2 and geodesics along three different directions

曲面2的实验结果如图7—图9所示,在实验中,本文方法相较于Zhang方法仍展现出约1个数量级的精度提升。随着步长的减小,本文方法与Zhang方法的计算误差均呈现出持续下降的趋势。而Beck方法在部分情况下却出现步长减小反而导

致误差增大的现象,如图7(a)、图8(a)和图9(a)所示。除极少数情况外,本文方法在计算精度和效率方面都优于Zhang方法和Beck方法。

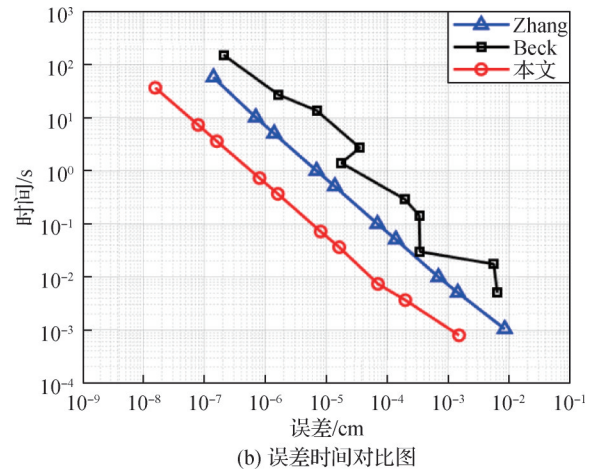
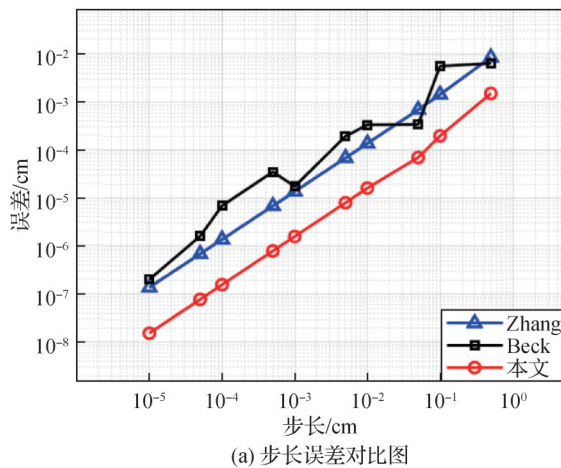


图7 曲面2在 $du : dv = 1 : 1$ 方向的对比图

Fig. 7 Comparison on Surface 2 in $du : dv = 1 : 1$ ((a) error versus step size; (b) computation time versus error)

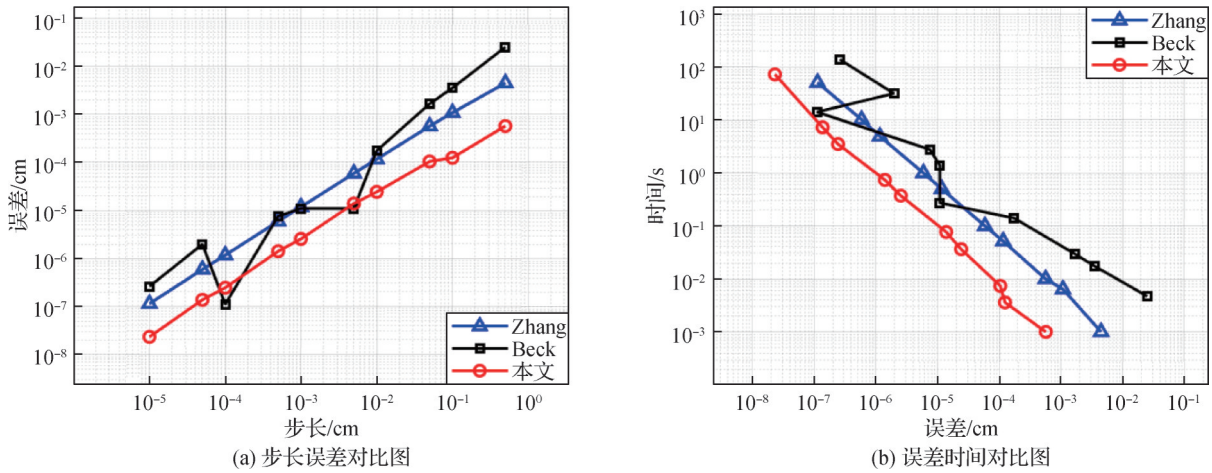


图8 曲面2在 $du : dv = 1 : 2$ 方向的对比图

Fig. 8 Comparison on Surface 2 in $du : dv = 1 : 2$ ((a) error versus step size; (b) computation time versus error)

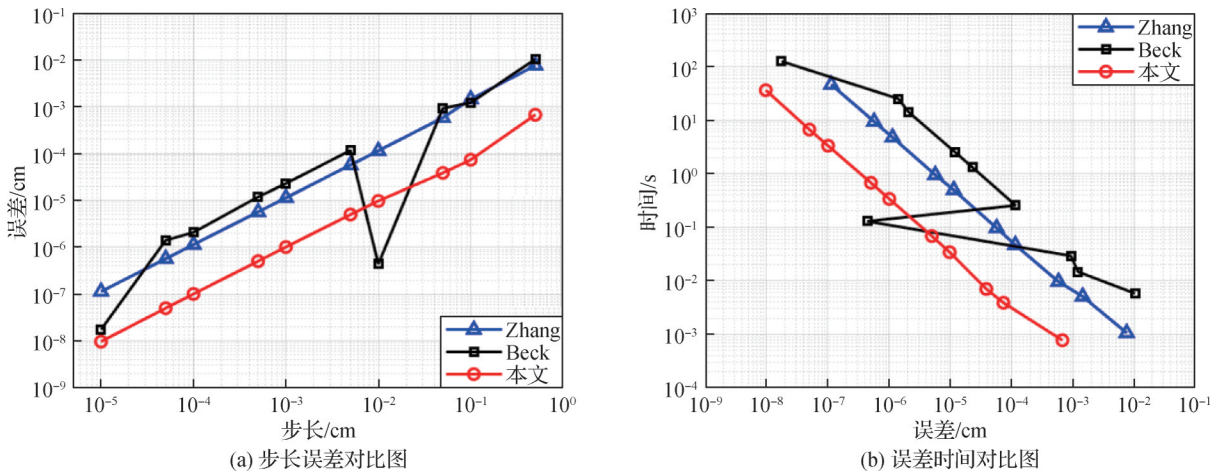


图9 曲面2在 $du : dv = 2 : 1$ 方向的对比图

Fig. 9 Comparison on Surface 2 in $du : dv = 2 : 1$ ((a) error versus step size; (b) computation time versus error)

曲面3为一个 4×4 的B样条曲面,如图10所示,其控制点为: $(0, 0, 17), (2, 0, 4), (4, 0, 13), (6, 0, 7), (8, 0, 19), (10, 0, 5), (12, 0, 8); (0, 2, 3), (2, 2, 15), (4, 2, 6), (6, 2, 14), (8, 2, 1), (10, 2, 20), (12, 2, 2); (0, 4, 9), (2, 4, 7), (4, 4, 0), (6, 4, 2), (8, 4, 12), (10, 4, 3), (12, 4, 16); (0, 6, 0), (2, 6, 1), (4, 6, 18), (6, 6, 9), (8, 6, 4), (10, 6, 13), (12, 6, 6); (0, 8, 12), (2, 8, 20), (4, 8, 5), (6, 8, 16), (8, 8, 8), (10, 8, 0), (12, 8, 11); (0, 10, 6), (2, 10, 10), (4, 10, 11), (6, 10, 3), (8, 10, 17), (10, 10, 14), (12, 10, 1); (0, 12, 19), (2, 12, 2), (4, 12, 8), (6, 12, 0), (8, 12, 6), (10, 12, 10), (12, 12, 7);$ u 方向的节点向量为 $(0, 0, 0, 0, 0, 0.3333, 0.6667, 1, 1, 1, 1, 1)$, v 方向的节点向量为 $(0, 0, 0, 0, 0, 0.3333, 0.6667, 1, 1, 1, 1, 1)$ 。在其上沿两个不同的初始方向 $du : dv = 2 : 1$,

$du : dv = 1 : 1$ 计算测地线,所得路径分别以红、绿两色绘制,曲面3的实验结果如表2和表3所示。由表2和表3可见,在相同条件下,本文方法在计算精度上相较Zhang方法提升约30倍,而Beck方法在精度方面表现最优。在计算时间方面,本文方法相较Zhang方法节省约25%,相比Beck方法则减少约75%。此外,对于这3种方法,当步长减小为原来的1/10时,计算时间均会增加为原来的10倍左右。这是因为步长变小时,为到达边界所需的离散点数也会相应增加,导致整体计算代价按比例上升。

曲面4为一个 4×4 的B样条曲面,如图11所示,其控制点数量为 21×21 。在其上沿两个不同的初始方向 $du : dv = 0.5 : 1.0, du : dv = 0.6 : 1.0$ 计算测地线,所得路径分别以红、绿两色绘制。

曲面4的实验结果如表4和表5所示。在该曲

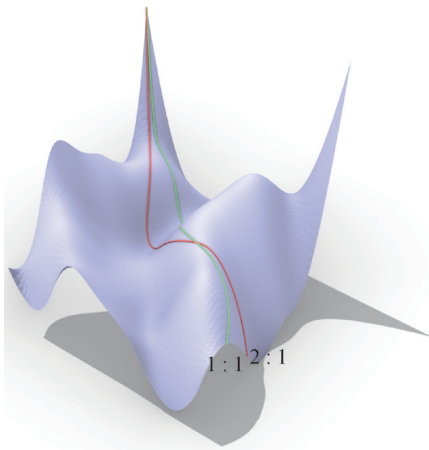


图10 曲面3及沿两个不同方向的测地线

Fig. 10 Surface 3 and geodesics along two different directions

面上,由于Zhang方法的表现不佳,其结果会随步长的变化而产生较大的差别,因此,在这种情况下,本文选取Beck方法在极小步长条件下所得的结果作为参照,同时将初始点设为 $h_0 = (0.5, 0.5)$ 。由表4可知,在曲面4的 $du : dv = 0.5 : 1.0$ 方向上,在计算时间方面,本文方法较Zhang方法缩短约25%,较Beck方法缩短约75%;在与参照结果的误差方面,本文方法相较Zhang方法降低了一个数量级以上,Beck方法的误差最小。由表5可知,在 $du : dv = 0.6 : 1.0$ 方向上,Zhang方法的计算结果与参照存在较大偏差;相比之下,本文方法仍能够获得与参照较为接近的结果,而Beck方法所得结果与参照一致性最佳。

表3 曲面3上沿 $du : dv = 1 : 1$ 方向的结果比较Table 3 Comparison of results along the direction $du : dv = 1 : 1$ on surface 3

方法	步长 = $1e-2/cm$		步长 = $5e-3/cm$		步长 = $1e-3/cm$		步长 = $5e-4/cm$		步长 = $1e-4/cm$	
	误差/cm	时间/s	误差/cm	时间/s	误差/cm	时间/s	误差/cm	时间/s	误差/cm	时间/s
Zhang	$1.70e-2$	$1.49e-1$	$8.05e-3$	$2.90e-1$	$1.55e-3$	1.50	$7.73e-4$	3.02	$1.54e-4$	14.9
Beck	$8.96e-8$	$4.05e-1$	$3.95e-8$	$8.45e-1$	$1.24e-9$	4.06	$4.96e-10$	8.35	$1.94e-11$	40.3
本文	$5.47e-4$	$1.11e-1$	$2.62e-4$	$2.15e-1$	$5.04e-5$	1.08	$2.50e-5$	2.19	$4.95e-6$	10.7

注:加粗字体表示各列最优结果。

表2 曲面3上沿 $du : dv = 2 : 1$ 方向的结果比较Table 2 Comparison of results along the direction $du : dv = 2 : 1$ on surface 3

方法	步长 = $1e-2/cm$		步长 = $5e-3/cm$		步长 = $1e-3/cm$		步长 = $5e-4/cm$		步长 = $1e-4/cm$	
	误差/cm	时间/s	误差/cm	时间/s	误差/cm	时间/s	误差/cm	时间/s	误差/cm	时间/s
Zhang	$6.15e-3$	$1.61e-1$	$3.03e-3$	$3.16e-1$	$6.00e-4$	1.60	$2.99e-4$	3.17	$5.98e-5$	16.0
Beck	$1.74e-8$	$4.55e-1$	$8.58e-9$	$8.64e-1$	$6.70e-10$	4.35	$1.59e-10$	8.62	$7.30e-12$	47.4
本文	$2.44e-4$	$1.14e-1$	$1.19e-4$	$2.32e-1$	$2.34e-5$	1.17	$1.17e-5$	2.31	$2.31e-6$	12.0

注:加粗字体表示各列最优结果。

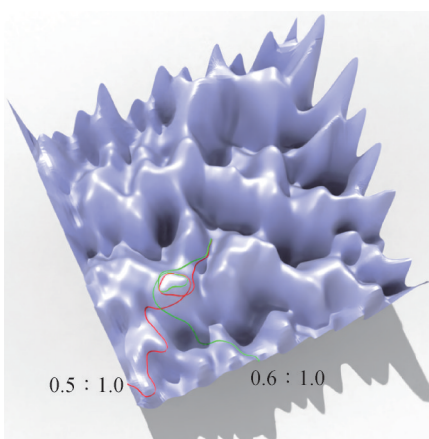


图11 曲面4及沿两个不同方向的测地线

Fig. 11 Surface 4 and geodesics along two different directions

综合图3—5、图7—图9及表2和表3的结果可知,Zhang等人(2019)方法的整体计算误差约为 $O(\Delta s)$,即当步长减小为原来的1/10时,计算精度会提升为原来的10倍左右。而由于本文方法在计算精度上比Zhang方法至少提高了1个数量级,且在计算时间上减少了25%左右,因此若Zhang方法要达到与本文方法相同的精度水平,其所需的计算时间将至少为本文方法的13倍。

Zhang方法和Beck方法均是在参数曲面上开展研究的,并且在计算过程中涉及曲面法向量及二阶偏导数的计算。因此,本文方法、Zhang方法和Beck方法均只能应用于二阶连续可导的正则参数曲面。

表4 曲面4上沿 $du : dv = 0.5 : 1.0$ 方向的结果比较Table 4 Comparison of results along the direction $du : dv = 0.5 : 1$ on surface 4

方法	步长 = $1e-2/cm$		步长 = $5e-3/cm$		步长 = $1e-3/cm$		步长 = $5e-4/cm$		步长 = $1e-4/cm$	
	误差/cm	时间/s	误差/cm	时间/s	误差/cm	时间/s	误差/cm	时间/s	误差/cm	时间/s
Zhang	$9.21e-1$	1.62	$4.35e-3$	$8.79e-1$	$2.75e-3$	4.65	$1.76e-3$	8.57	$4.76e-4$	47.45
Beck	$4.02e-6$	1.21	$1.06e-6$	2.59	$2.64e-8$	12.37	$1.04e-8$	23.07	$3.65e-10$	128.85
本文	$1.86e-3$	$3.07e-1$	$1.06e-3$	$6.10e-1$	$2.49e-4$	3.38	$1.27e-4$	6.53	$2.60e-5$	33.07

注:加粗字体表示各列最优结果。

表5 曲面4上沿 $du : dv = 0.6 : 1.0$ 方向的结果比较Table 5 Comparison of results along the direction $du : dv = 0.6 : 1$ on surface 4

方法	步长 = $1e-2/cm$		步长 = $5e-3/cm$		步长 = $1e-3/cm$		步长 = $5e-4/cm$		步长 = $1e-4/cm$	
	误差/cm	时间/s	误差/cm	时间/s	误差/cm	时间/s	误差/cm	时间/s	误差/cm	时间/s
Zhang	$7.02e-1$	$3.73e-1$	$6.99e-1$	1.59	$9.96e-1$	7.91	$3.31e-1$	9.25	$4.41e-2$	50.10
Beck	$9.75e-6$	1.30	$2.50e-7$	2.55	$5.35e-9$	12.41	$1.95e-10$	24.73	$5.69e-10$	122.94
本文	$1.03e-2$	$3.31e-1$	$6.47e-3$	$6.63e-1$	$1.53e-3$	3.21	$7.82e-4$	6.37	$1.59e-4$	31.43

注:加粗字体表示各列最优结果。

值得注意的是,当曲面为几乎处处无限可微的正则参数曲面(如B样条曲面)时,本文方法相较于Zhang方法和Beck方法能够展现出更加显著的优势。

多组实验结果表明,在相同条件下,本文方法在计算时间上较Zhang方法节省了约25%,同时计算精度提升了1~3个数量级。Beck的数值方法虽然在某些情况下可达到很高的计算精度,但其有3个明显的缺陷。首先,其计算精度存在上限,且该上限并不固定,难以预估,如图3—图5所示;其次,其精度在不同曲面间波动较大。例如,在曲面1和曲面3上,其计算精度优于本文方法,但在曲面2上,其计算精度甚至低于Zhang方法;最后,即使在同一曲面的同一方向上,随着步长的减小,其计算精度也表现出较强的不稳定性。如图7和图8所示,甚至会出现步长减小,计算精度反而降低的情况。本文改善后的几何方法在提高了原有几何方法计算效率的同时,也可以避免上述Beck的数值方法出现的问题,更有实际应用价值。

4 结论

本文提出了一种简单有效的计算测地线在一点处曲率向量的方法,并在此基础上对已有的几何方法进行了改进。改进后的几何方法在计算时间上相

较原方法节省了约25%,在计算精度上提升了1~3个数量级。这也意味着,Zhang方法要达到与本文方法相同的计算精度,其所需要的计算时间至少是本文方法的13倍。此外,本文还将所提方法与Beck提出的数值方法进行了对比,在相同条件下,本文方法在时间上比Beck的方法节省了75%,在计算精度方面,两者各有优劣,但Beck方法的精度表现不稳定,且在某些情况下存在精度上限;相比之下,本文方法精度不仅更加稳定,且可随着步长减小而持续提升。因此,本文方法在实际应用中更具优势。

需要指出的是,本文方法主要面向几乎处处光滑的正则参数曲面。虽然该方法同样适用于二阶连续可导的正则参数曲面,但其计算精度与稳定性可能会受到一定影响。其原因在于:相较于无限可微曲面,二阶连续可导曲面的光滑性显著降低,从而可能导致高阶余项误差增大,进而对计算精度和稳定性产生不利影响。本文所采用的几何方法基于二阶泰勒展开,若能将其进一步扩展至三阶乃至更高阶,将有望显著降低整体误差,从而提升算法的精度与稳定性。此外,无论是几何方法还是数值方法,均通过一系列离散点逼近测地路径。在整体误差的估计中,计算误差会在迭代过程中不断累积,且其并非截断误差的简单叠加。因此,如何有效分析并控制计算过程中的误差累计,将是一个值得深入研究的重

要方向。

参考文献 (References)

- Beck J, Farouki R and Hinds J. 1986. Surface analysis methods. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 6(12): 18-36 [DOI: 10.1109/MCG.1986.276587]
- Bose P, Maheshwari A, Shu C and Wuhler S. 2011. A survey of geodesic paths on 3D surfaces. *Computational Geometry*, 44(9): 486-498 [DOI: 10.1016/j.comgeo.2011.05.006]
- Bulut V, Onan A and Senyayla B. 2024. Obtaining the optimal shortest path between two points on a quasi-developable Bézier-type surface using the Geodesic-based Q-learning algorithm. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 136: #108821 [DOI: 10.1016/j.engappai.2024.108821]
- Chen D, Zhu J, Zhang X X, Shu M L and Cohen L D. 2021. Geodesic paths for image segmentation with implicit region-based homogeneity enhancement. *IEEE Transactions on Image Processing*, 30: 5138-5153 [DOI: 10.1109/TIP.2021.3078106]
- Chen S G. 2010. Geodesic-like curves on parametric surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 27(1): 106-117 [DOI: 10.1016/j.cagd.2009.10.001]
- Chen W H. 2017. *Differential Geometry*. 2nd ed. Beijing: Peking University Press: 21-231 (陈维桓. 2017. 微分几何. 2版. 北京: 北京大学出版社): 21-231)
- Chen Y D and Li L. 2016. Smooth geodesic interpolation for five-axis machine tools. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 21(3): 1592-1603 [DOI: 10.1109/TMECH.2016.2521683]
- Chen Y D, Li L and Tang W. 2016. An improved geodesic algorithm for trajectory planning of multi-joint robots. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 13(5): 1-10 [DOI: 10.1177/1729881416657742]
- Cheng P, Miao C Y, Liu Y J, Tu C H and He Y. 2016. Solving the initial value problem of discrete geodesics. *Computer-Aided Design*, 70: 144-152 [DOI: 10.1016/j.cad.2015.07.012]
- Debout P, Chanal H and Duc E. 2011. Tool path smoothing of a redundant machine: application to automated fiber placement. *Computer-Aided Design*, 43(2): 122-132 [DOI: 10.1016/j.cad.2010.09.011]
- Do Carmo M P. 1976. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall: 220-320
- Hotz I and Hagen H. 2000. Visualizing geodesics//*Proceedings of IEEE Visualization 2000*. Salt Lake City, USA: IEEE: 311-318 [DOI: 10.1109/VISUAL.2000.885710]
- Kanai T and Suzuki H. 2000. Approximate shortest path on a polyhedral surface based on selective refinement of the discrete graph and its applications//*Proceedings of Geometric Modeling and Processing 2000: Theory and Applications*. Hong Kong, China: IEEE: 241-250 [DOI: 10.1109/GMAP.2000.838256]
- Kasap E, Yapici M and Akyildiz F T. 2005. A numerical study for computation of geodesic curves. *Applied Mathematics and Computation*, 171(2): 1206-1213 [DOI: 10.1016/j.amc.2005.01.109]
- King N, Ruuth S and Batty C. 2024. A simple heat method for computing geodesic paths on general manifold representations//*Proceedings of SIGGRAPH Asia 2024 Posters*. Tokyo, Japan: ACM: #69 [DOI: 10.1145/3681756.3697920]
- Kumar G V V R, Srinivasan P, Holla V D, Shastry K G and Prakash B G. 2003. Geodesic curve computations on surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 20(2): 119-133 [DOI: 10.1016/S0167-8396(03)00023-2]
- Ma Y Q, Li Z K and Wang X Z. 2011. Research on interactive algorithm of teeth segmentation based on geodesic path. *Journal of Image and Graphics*, 16(4): 554-558 (马亚奇, 李忠科, 王先泽. 2011. 基于测地路径的牙齿模型交互分割算法研究. *中国图象图形学报*, 16(4): 554-558) [DOI: 10.11834/jig.20110412]
- Maekawa T. 1996. Computation of shortest paths on free-form parametric surfaces. *Journal of Mechanical Design*, 118(4): 499-508 [DOI: 10.1115/1.2826919]
- Martínez D, Velho L and Carvalho P C. 2005. Computing geodesics on triangular meshes. *Computers and Graphics*, 29(5): 667-675 [DOI: 10.1016/j.cag.2005.08.003]
- Ouyang H, Jin L B and Deng J S. 2008. Computation of geodesic lines between two points on algebraic surfaces. *Journal of University of Science and Technology of China*, 38(9): 1068-1074 (欧阳宏, 金良兵, 邓建松. 2008. 代数曲面上测地线的计算. *中国科学技术大学学报*, 38(9): 1068-1074)
- Patrikalakis N M and Bardis L. 1989. Offsets of curves on rational B-spline surfaces. *Engineering with Computers*, 5(1): 39-46 [DOI: 10.1007/BF01201996]
- Polthier K and Schmieß M. 2006. Straightest geodesics on polyhedral surfaces//*Proceedings of ACM SIGGRAPH 2006 Courses*. Boston, USA: ACM: 30-38 [DOI: 10.1145/1185657.1185664]
- Potamias R A, Neofytou A, Binti K M and Zafeiriou S. 2022. Graph-Walks: efficient shape agnostic geodesic shortest path estimation//*Proceedings of 2022 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition Workshops (CVPRW)*. New Orleans, USA: IEEE: 2967-2976 [DOI: 10.1109/CVPRW56347.2022.00335]
- Sharp N and Crane K. 2020. You can find geodesic paths in triangle meshes by just flipping edges. *ACM Transactions on Graphics*, 39(6): #249 [DOI: 10.1145/3414685.3417839]
- Shou H H, Wu X J and Yang L. 2019. Constructing discrete surface through given discrete geodesics. *Journal of Computer-Aided Design and Computer Graphics*, 31(5): 736-742 (寿华好, 吴晓婧, 杨霖. 2019. 以多条离散曲线为测地线构造离散曲面. *计算机辅助设计与图形学学报*, 31(5): 736-742) [DOI: 10.3724/SP.J.1089.2019.17383]
- Surazhsky V, Surazhsky T, Kirsanov D, Gortler S J and Hoppe H. 2005. Fast exact and approximate geodesics on meshes. *ACM Transactions on Graphics*, 24(3): 553-560 [DOI: 10.1145/1073204.1073228]

- Wang X N, Fang Z, Wu J J, Xin S Q and He Y. 2017. Discrete geodesic graph (DGG) for computing geodesic distances on polyhedral surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 52-53: 262-284 [DOI: 10.1016/j.cagd.2017.03.010]
- Yuan N, Wang P H, Meng W L, Chen S M, Xu J, Xin S Q, et al. 2023. A variational framework for curve shortening in various geometric domains. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 29(4): 1951-1963 [DOI: 10.1109/TVCG.2021.3135021]
- Zhang P, Sun R L and Huang T. 2015. A geometric method for computation of geodesic on parametric surfaces. *Computer Aided Geometric Design*, 38: 24-37 [DOI: 10.1016/j.cagd.2015.08.001]
- Zhang P, Xiong J and Huang L. 2019. An efficient method for computation of geodesic on B-spline surfaces//*Proceedings of 2019 International Conference on Advances in Construction Machinery and Vehicle Engineering*. Changsha, China: IEEE: 311-316 [DOI: 10.1109/ICACMVE.2019.00067]
- Zhao J L, Xin S Q, Liu Y J, Wang X C, Wu Z K, Zhou M Q, et al. 2015. A survey on the computing of geodesic distances on meshes. *SCIENTIA SINICA Informationis*, 45(3): 313-335 (赵俊莉, 辛士庆, 刘永进, 王醒策, 武仲科, 周明全, 等. 2015. 网格模型上的离散测地线. *中国科学: 信息科学*), 45(3): 313-335 [DOI: 10.1360/N112014-00018]
- Zhou G, Wu Y J, Song D Y and Li A. 2010. Geodesics on triangular meshes surface based on MMP. *Journal of Image and Graphics*, 15(8): 1260-1268 (周刚, 邹义杰, 宋德玉, 李岸. 2010. 基于MMP三角曲面测地线算法研究. *中国图象图形学报*, 15(8): 1260-1268) [DOI: 10.11834/jig.20100805]

作者简介

朱子建,男,硕士研究生,主要研究方向为计算几何。

E-mail: 630686185@qq.com

傅孝明,通信作者,男,副教授,主要研究方向为几何深度学习、拓扑优化与结构生成、几何处理与优化。

E-mail: fuxm@ustc.edu.cn